Potenzfunktionen

Themen:

1. **Grundeigenschaften, Schaubilder**
2. **Kurvengleichungen aufstellen**

Datei Nr. 18005

Stand 27. Juli 2012

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Hinweis

Potenzfunktionen stellen eine gewisse Grundlage in der Theorie der Funktionen dar. Auf Grund ihrer einfachen Gleichungen und der dazu typischen Gleichungsformen werden sie immer wieder in **Prüfungen** eingesetzt. Dabei geht es im Wesentlichen um drei Kenntnisse, die abgeprüft werden:

1. Identifikation von Funktions- oder Kurvengleichung mit einem Schaubild, dazu:
2. Kenntnis der Grundeigenschaften der Funktionen, die sich im Schaubild ausdrücken Wie Definitionsbereich, Senkrechte Asymptote, Krümmungsverhalten.
3. Aufstellen von Funktionsgleichungen aus der Kenntnis zweier Punkte des Graphen. Also: Lösen eines Gleichungssystems, das hier eine spezielle Methode verlangt.

Dies alles wird in diesem 2012 neu gestaltetem Text besprochen und geübt.

Die Graphik-Dateien (zu MatheGrafix) sind im Archiv 18025.zip im Ordner Mathegrafiken gespeichert, zur eigenen Information oder Bearbeitung.

Inhalt

1 Das Grundwissen: Verlauf der Schaubilder

Potenzfunktionen haben Gleichungen der Form. $f(x) = a \cdot x^n$

Die Funktionseigenschaften und der Verlauf der Funktionsgraphen (Schaubilder) hängt von der Art des Exponenten n ab.

Man unterscheidet demnach (Beispiele):

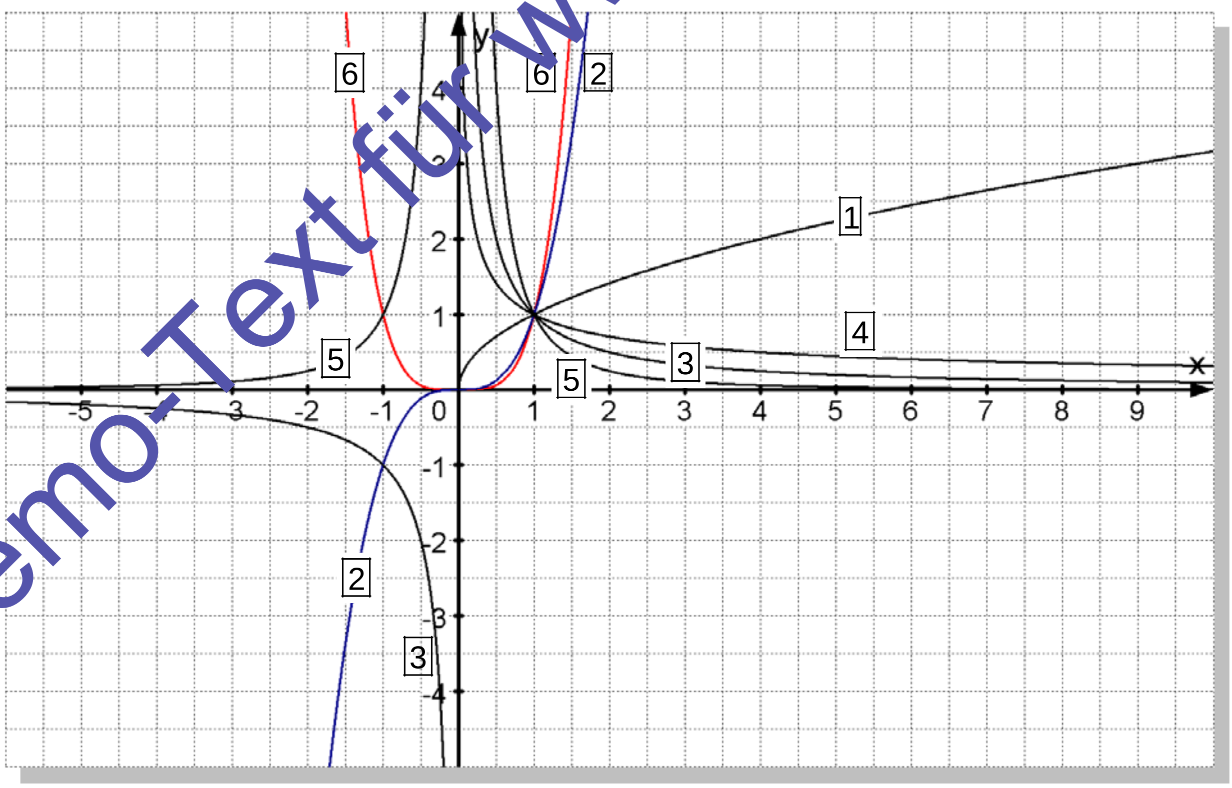
Natürliche Exponenten	$f(x) = x^2$,	$f(x) = \frac{1}{2}x^3$	usw.
Negative ganze Exponenten:	$f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$,	$f(x) = 4x^{-2} = \frac{4}{x^2}$	usw.
Bruchexponenten:	$f(x) = x^{1/2} = \sqrt{x}$,	$f(x) = 4 \cdot x^{-2/3} = \frac{4}{x^{2/3}} = \frac{4}{\sqrt[3]{x^2}}$	usw.

Einführungsaufgabe 1

Zu jeder der folgenden Funktionen ist der Graph dargestellt.
Ordne jeder Funktion ihren Graphen zu!

$f(x) = x^3$, $g(x) = x^4$, $h(x) = x^{-1}$,
$k(x) = x^{-2}$ $l(x) = x^{1/2}$ $m(x) = x^{-1/2}$

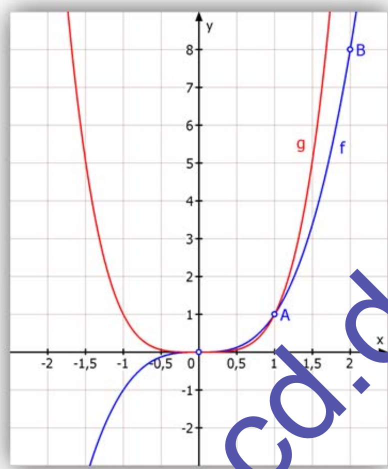
Anleitung: Die Berechnung einiger Kurvenpunkte kann helfen.



Weitere solche Aufgaben findet man auf Seite 15 und 16 in den Trainingsaufgaben (4) bis (6).

Solche Aufgaben kommen in Prüfungen vor.

Lösung: (mit Anleitung und Grundwissen)



$f(x) = x^3$ und $g(x) = x^4$:

Die Berechnung von $f(2) = 8$ (Punkt $B(2\,|\,8)$

und $g(2) = 16$ zeigt, dass $\boxed{2}$ der Graph von g ist

und $\boxed{6}$ der von f.

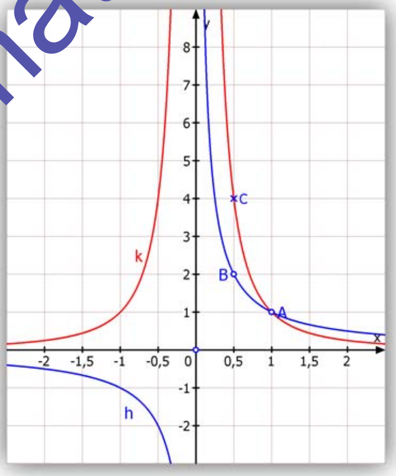
Hinweis: Man erkennt auch gleich zwei wesentliche Eigenschaften: g hat keine negativen Werte und ihr Schaubild ist **symmetrisch zur y-Achse**, weil wegen des geraden Exponenten

$g(-x) = (-x)^4 = x^4 = g(x)$ ist.

f dagegen hat wegen seines ungeraden Exponenten für positive x positive Werte, für negative x dann negative.

Das Schaubild ist daher **punktsymmetrisch zum Ursprung**:

$f(-x) = (-x)^3 = -(x^3) = -f(x)$.



$h(x) = x^{-1} = \dfrac{1}{x}$ und $k(x) = x^{-2} = \dfrac{1}{x^2}$

Die Berechnung von $h\left(\tfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = 2$ (Punkt $B\left(\tfrac{1}{2}\,|\,2\right)$)

und $k\left(\tfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \dfrac{1}{\frac{1}{4}} = 4$ (Punkt $C\left(\tfrac{1}{2}\,|\,4\right)$, zeigt,

dass $\boxed{3}$ der Graph von h und $\boxed{5}$ der von k ist.

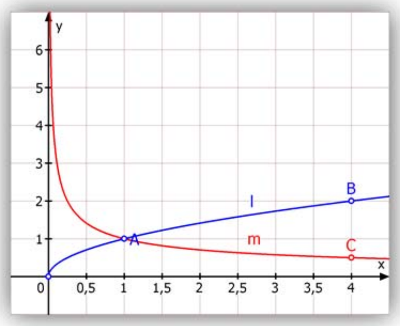
Hinweis: Eigenschaften: k hat wegen des Quadrats keine negativen Werte und ihr Schaubild ist **symmetrisch zur y-Achse**.
h dagegen hat wegen seines ungeraden Exponenten für positive x positive Werte, für negative x dann negative.
Das Schaubild ist **punktsymmetrisch zum Ursprung**.

$l(x) = x^{1/2} = \sqrt{x}$ und $m(x) = x^{-1/2} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

Hier bietet es sich an, die Funktionswerte zu x = 4 zu berechnen:

$l(4) = \sqrt{4} = 2$ (Punkt $B(4\,|\,2)$ und

$m(4) = \dfrac{1}{\sqrt{4}} = \dfrac{1}{2}$ Punkt $C\left(4\,|\,\tfrac{1}{2}\right)$



Hinweis: l hat den Definitionsbereich $\mathbf{D} = [\,0\,;\infty\,[$
m hat den Definitionsbereich $\mathbf{D} =]\,0\,;\infty\,[$.

Daher besitzt das Schaubild von l einen linken Randpunkt, der zugleich Tiefpunkt ist, während der Graph von m keinen linken Randpunkt haben kann, weil man zu 0 keinen Funktionswert berechnen kann.

Für $x \to 0+$ (das bedeutet: x gegen 0 von rechts), gehen die Funktionswerte $m(x) \to \infty$.

Die Kurve nähert sich daher der y-Achse beliebig gut an:
Die y-Achse ist jetzt eine **senkrechte Asymptote**.

1.1 Natürliche Exponenten

Die Potenzfunktionen $f_n(x) = x^n$ besitzen alle eine typische Form. Diese sollte man kennen.

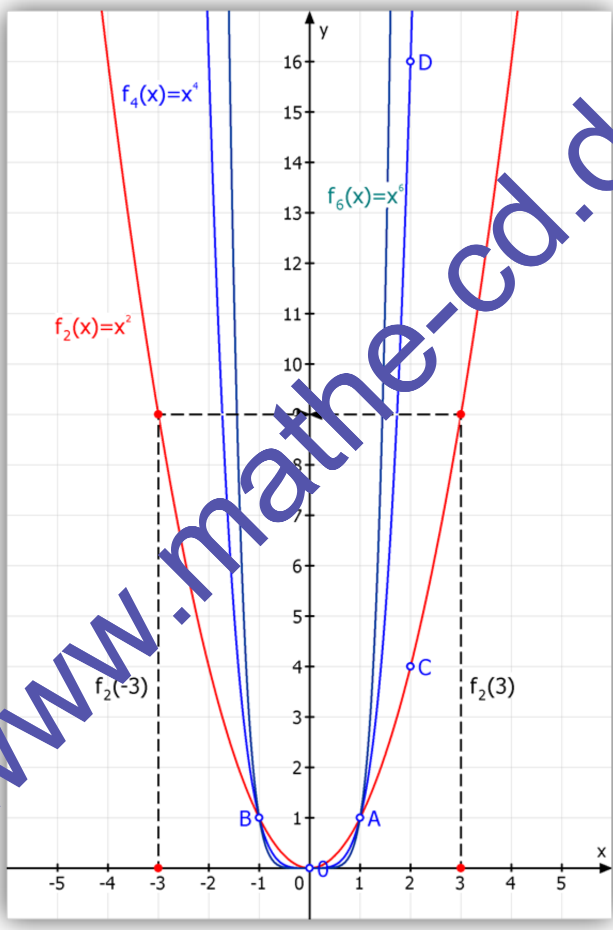
Für gerade Exponenten haben ihre Schaubilder diese Formen:

Beobachtung:

(1) Jede dieser Kurven ist symmetrisch zur y-Achse.

(2) Alle diese Kurven gehen durch $O(0|0)$, $A(1|1)$ und $B(-1|1)$

(3) Je größer der Exponent n, desto steiler verläuft die Kurve für $x > 1$.



Die **Symmetrie zur y-Achse** lässt sich so nachrechnen:

Wegen der geraden Exponenten gilt:

$$f(-x) = f(x).$$

Dies ist z. B. für f_2 an den Stellen 3 und -3 eingezeichnet:

$$f_2(-3) = (-3)^2 = 3 = f_2(3)$$